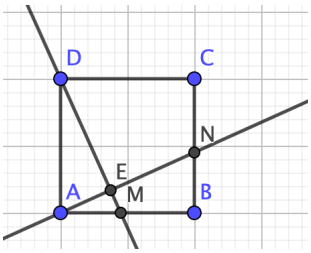
CORRIGÉ

Problème 1 : VRAI-FAUX

Calculs dans $\mathbb{R}$

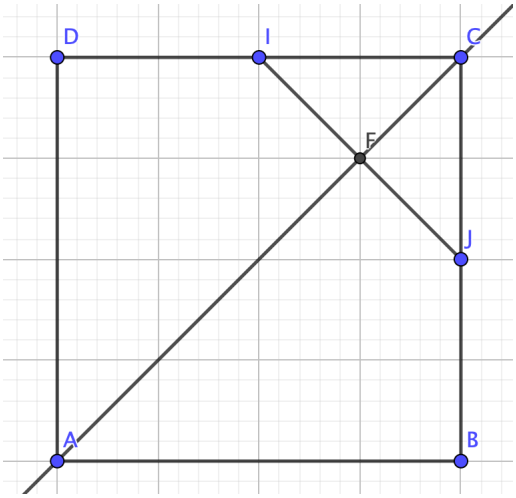
1. **FAUSSE** Montrons que 3 est un contre-exemple. Il est clair que $3 = \frac{3}{10^0}$ est un nombre décimal. On raisonne par l'absurde, supposons que $\frac{1}{3}$ soit décimal, il s'écrit donc $\frac{n}{10^k}$ avec $n \in \mathbb{Z}$ et $k \in \mathbb{N}$. On a alors $\frac{1}{3} = \frac{n}{10^k}$ et donc $3n = 10^k$. Or $10^k = 1^k = 1$ modulo 3 donc 3 ne divise pas 10^k et l'on obtient donc la contradiction.
2. **FAUSSE** Notons h la hauteur d'un cylindre et r son rayon. Le volume du cylindre correspondant est $D(r,h) = h \times \pi r^2$. Supposons que l'on double le rayon, on obtient alors $D(2r,h) = 4 \times h \times \pi r^2 = 4 \times D(r,h)$. Cela montre que le volume est proportionnel au carré du rayon et pas au rayon.
3. **VRAIE** On a
$$\frac{1}{\sqrt{2}-1} = \frac{\sqrt{2}+1}{(\sqrt{2}-1)(\sqrt{2}+1)} = \frac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}^2 - 1^2} = \frac{\sqrt{2}+1}{1} = \boxed{\sqrt{2}+1}$$
4. **FAUSSE** Considérons $x = -2$, on a $\frac{1}{x^2} = \frac{1}{4}$ et vérifie donc bien $\frac{1}{9} \leq \frac{1}{x^2} \leq \frac{1}{4}$. Pourtant $x = -2 \notin [2,3]$.
5. **FAUSSE** Considérons $x = -0.5$. On a $x^2 = 0.25 < 0.5 = -x$. L'assertion $-x \leq x^2$ est donc fausse.
6. **VRAIE** On effectue un dessin (AN) et (DM), on note a la longueur du segment $[A,M]$ et x la longueur du segment $[A,D]$.



Calculons le produit scalaire $\langle \overrightarrow{DM}, \overrightarrow{AN} \rangle$:

$$\begin{aligned}
\langle \overrightarrow{DM}, \overrightarrow{AN} \rangle &= \langle \overrightarrow{DA} + \overrightarrow{AM}, \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BN} \rangle \text{ par la relation de Chasles} \\
&= \langle \overrightarrow{DA}, \overrightarrow{AB} \rangle + \langle \overrightarrow{DA}, \overrightarrow{BN} \rangle + \langle \overrightarrow{AM}, \overrightarrow{AB} \rangle + \langle \overrightarrow{AM}, \overrightarrow{BN} \rangle \text{ par bilinéarité} \\
&= \langle \overrightarrow{DA}, \overrightarrow{BN} \rangle + \langle \overrightarrow{AM}, \overrightarrow{AB} \rangle \text{ par orthogonalité} \\
&= -ax + ax \text{ car } \overrightarrow{DA} \text{ et } \overrightarrow{BN} \text{ ont des directions opposées et } \overrightarrow{AM} \text{ et } \overrightarrow{AB} \text{ ont même direction} \\
&= \boxed{0}
\end{aligned}$$

7. **FAUSSE** Le quadrilatère $BDEF$ est un rectangle car ses angles sont tous droits. Il est un carré si et seulement si deux arêtes successives sont égales si et seulement si $BD = DE$. D'une part $BD = AB - AD = 14$. D'autre part, puisque (DE) et (BF) sont parallèles, on peut appliquer le théorème de Thalès dans le triangle ABC et l'on obtient
$$\frac{AB}{AD} = \frac{BC}{DE} \text{ et donc } DE = \frac{BC \times AD}{AB} = \frac{21 \times 21}{35} = \frac{21 \times 3}{5} = \frac{63}{5} = 14 + \frac{3}{5} \neq 14$$
Ainsi, $\boxed{BD \neq DE}$
8. **VRAIE** On effectue un dessin :



Notons x l'angle $\widehat{BAJ}$. Par symétrie, $x = \widehat{IAD}$. On a alors $\frac{\pi}{2} = 2x + \widehat{JAI}$ et donc $\widehat{IAJ} = \frac{\pi}{2} - 2x$. Nous avons ensuite :

$$\cos(\widehat{IAJ}) = \cos\left(\frac{\pi}{2} - 2x\right) = \sin(2x) = 2\cos(x)\sin(x) = 2\cos^2(x)\tan(x)$$

On utilise ensuite le fait que $\frac{1}{\cos^2} = \tan' = 1 + \tan^2$ pour obtenir :

$$\cos(\widehat{IAJ}) = \frac{2\tan(x)}{1+\tan^2(x)}$$

Remarque : on retrouve bien sûr la formule du sinus en fonction de la tangente de l'angle moitié.

Pour finir, en faisant de la trigonométrie dans le triangle rectangle ABJ, on a $\tan(x) = \frac{BJ}{AB} = \frac{1}{2}$. Par conséquent :

$$\cos(\widehat{IAJ}) = \frac{2 \times \frac{1}{2}}{1 + \frac{1}{4}} = \frac{4}{4+1} = \boxed{\frac{4}{5}}$$

9. **VRAIE** Rappelons que deux angles x et y sont complémentaires si $x + y = \frac{\pi}{2}$. On a alors

$$\begin{aligned}
\sin^2(x) + \sin^2(y) &= \sin^2(x) + \sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) \text{ car } y = \frac{\pi}{2} - x \\
&= \sin^2(x) + \cos^2(-x) \text{ car } \sin\left(\frac{\pi}{2} + a\right) = \cos(a) \\
&= \sin^2(x) + \cos^2(x) \text{ car cos est paire} \\
&= \boxed{1}
\end{aligned}$$

10. **VRAE** Supposons $\langle \vec{u}, \vec{v} - \vec{w} \rangle = 0$ et $\langle \vec{v}, \vec{u} - \vec{w} \rangle = 0$ on a alors

$$\begin{aligned}
0 &= \langle \vec{u}, \vec{v} - \vec{w} \rangle - \langle \vec{v}, \vec{u} - \vec{w} \rangle \\
&= \langle \vec{u}, \vec{v} \rangle - \langle \vec{u}, \vec{w} \rangle - \langle \vec{v}, \vec{u} \rangle + \langle \vec{v}, \vec{w} \rangle \text{ par bilinéarité} \\
&= \langle \vec{v}, \vec{w} \rangle - \langle \vec{u}, \vec{w} \rangle \text{ car } \langle \vec{u}, \vec{v} \rangle = \langle \vec{v}, \vec{u} \rangle \\
&= \langle \vec{v} - \vec{u}, \vec{w} \rangle
\end{aligned}$$

d'où $\boxed{\vec{w} \perp (\vec{u} - \vec{v})}$

11. **VRAIE** Supposons que $ax^2 + bx + c = 0$ admette deux solutions r_1 et r_2. Alors pour tout $x \in \mathbb{R}$, $ax^2 + bx + c = a(x - r_1)(x - r_2) = ax^2 - a(r_1 + r_2)x + ar_1r_2$. En particulier, si $r_1 = -r_2$ alors pour tout $x \in \mathbb{R}$, $ax^2 + bx + c = ax^2 + ar_1r_2$ et, en identifiant les coefficients, $\boxed{b = 0}$

12. **VRAIE** Remarquons que f et g sont dérivables sur $\mathbb{R}$. De plus,

$$f'(x) = 3x^2 + 3 \text{ et } g'(x) = 3 + \sin(x) + 2x\sin(x) + x^2\cos(x)$$

On a alors $f(0) = 0$, $f'(0) = 3$ et $g(0)$, $g'(0) = 3$. Par conséquent les tangentes à f et g en 0 passent toutes deux par le point de coordonnées $(0, 0)$ et sont toutes deux de coefficient directeur 3. Elles sont donc confondues

13. **FAUSSE** La fonction ln est négative sur $]0, 1]$. Ainsi, pour que $\ln(\ln(x))$ soit bien définiet puisque ln est définie sur $]0, +\infty[$, il faut que $x > 1$

14. **VRAIE** Il y a $\binom{20}{10}$ parties à 10 éléments dans un ensemble à 20 éléments. Remarquons que

$$\binom{20}{10} = \frac{20!}{10!(20-10)!} = \frac{20!}{10!10!} = \frac{20 \times 19!}{10 \times 9! \times 10!} = \frac{20}{10} \times \frac{19!}{10!(19-10)!} = \boxed{2 \times \binom{19}{10}}$$

15. **VRAIE** Notons D_i l'événement « tirer une dame au i-ème tirage » pour $i = 1, 2$. On constate alors que $(D_1, \overline{D_1})$ est un système complet d'événements. On applique alors la formule des probabilités totales :

$$\mathbb{P}(D_2) = \mathbb{P}(D_1)\mathbb{P}_{D_1}(D_2) + \mathbb{P}(\overline{D_1})\mathbb{P}_{\overline{D_1}}(D_2).$$

On a par équiprobabilité $\mathbb{P}(D_1) = \frac{4}{12} = \frac{1}{3}$ et $\mathbb{P}(\overline{D_1}) = \frac{8}{12} = \frac{2}{3}$. De plus, sachant que l'on a tiré une dame au premier tirage, la probabilité de tirer une dame au deuxième tirage est $\mathbb{P}_{D_1}(D_2) = \frac{3}{11}$. De même, sachant que l'on n'a pas tiré une dame au premier tirage, la probabilité de tirer une dame au deuxième tirage est $\mathbb{P}_{\overline{D_1}}(D_2) = \frac{4}{11}$. Ainsi :

$$\mathbb{P}(D_2) = \frac{1}{3} \times \frac{3}{11} + \frac{2}{3} \times \frac{4}{11} = \frac{3+8}{3 \times 11} = \frac{11}{3 \times 11} = \boxed{\frac{1}{3}}$$

16. **VRAIE** Puisqu'il y a 3 faces paires sur 6 au total et que le dé est équilibré, $\mathbb{P}(X = 2) = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$. Ainsi

$$\mathbb{E}(X) = 0 \times \mathbb{P}(X = 0) + 2 \times \mathbb{P}(X = 2) = 2 \times \frac{1}{2} = \boxed{1}$$

17. **FAUSSE** On note X_i la variable aléatoire qui vaut 1 si Axel a répondu correctement au i-ème QCM. Les X_i sont des variables aléatoires de Bernoulli indépendantes de même paramètre $\frac{1}{4}$. Si l'on note $S = X_1 + X_2 + X_3$ alors S suit une loi binomiale de paramètres 3 et $\frac{1}{4}$. La probabilité recherchée est

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}([S = 2] \cup [S = 3]) &= \mathbb{P}(S = 2) + \mathbb{P}(S = 3) \\
&= \binom{3}{2}\left(\frac{1}{4}\right)^2 \times \frac{3}{4} + \binom{3}{3}\left(\frac{1}{4}\right)^3 \\
&= \frac{9}{4^3} + \frac{1}{4^3} \\
&= \frac{10}{4^3} \\
&= \frac{1}{4} \times \frac{10}{16} \\
&\boxed{< \frac{1}{4}} \text{ car } \frac{10}{16} < 1
\end{aligned}$$

18. **FAUSSE** La loi T est sans mémoire ainsi $\mathbb{P}_{T>15}(T > 15+5) = \mathbb{P}(T > 5)$. La densité est donnée par $f(x) = 0.25\exp(-0.25x)$. On a

$$\mathbb{P}(T > 5) = 1 - \mathbb{P}(T \leq 5) = 1 - \int_0^5 0.25\exp(-0.25x)dx = 1 - 0.25[-4\exp(-0.25x)]_0^5 = \exp(-1.25)$$

Puisque, avec la calculatrice, $\exp(-1.25) \approx 0.286$. La probabilité recherchée est $\mathbb{P}_{T>15}(T \leq 15 + 5) = 1 - \mathbb{P}_{T>15}(T > 15 + 5) = 1 - \mathbb{P}(T > 5)$ et donc, avec l'approximation obtenu, $\mathbb{P}_{T>15}(T \leq 15 + 5) \approx 0.714 \leq 0.9$

19. **FAUSSE** 1 et 2 divisent 2, pourtant $1 + 2 = 3$ ne divise pas 2.

20. **VRAIE** Supposons x, y, z sont impairs alors $x^2 \equiv y^2 \equiv z^2 \equiv 1$ modulo 2 et donc $x^2+y^2 \equiv 2 \equiv 0$ modulo 2. En particulier, on ne peut avoir $x^2 + y^2 \equiv z^2$ modulo 2 car 0 n'est pas congru à 1 modulo 2. En particulier, $\boxed{x^2 + y^2 \neq z^2}$

Problème 2 : géométrie dans l'espace

1. Remarquons que $D = A + \overrightarrow{AD} = A + \overrightarrow{EH} \in (AEH)$. Ainsi D est un point d'intersection des plans (AEH) et (BGD). Puisque les plans ne sont pas confondus et ont un point commun, ils ne peuvent être parallèles
2. La section en question est le triangle BGD. Puisque les segments BD, BG et GD sont les diagonales d'une face d'un même cube, ils ont même longueur et le triangle BGD est donc équilatéral
3. a) **Oui** Montrons que $\overrightarrow{DE}$ et $\overrightarrow{DC}$ sont orthogonaux. En effet :

$$\begin{aligned}\langle \overrightarrow{DE}, \overrightarrow{DC}\rangle &= \langle \overrightarrow{DH} + \overrightarrow{HE}, \overrightarrow{DC}\rangle \text{ par la relation de Chasles}\\ &= \langle \overrightarrow{DH}, \overrightarrow{DC}\rangle + \langle \overrightarrow{HE}, \overrightarrow{DC}\rangle \text{ par bilinéarité}\\ &= 0 + 0\\ &= \boxed{0}\end{aligned}$$

b) **Non** Montrons que $\overrightarrow{DE}$ et $\overrightarrow{DB}$ ne sont pas orthogonaux. En effet :

$$\begin{aligned}\langle \overrightarrow{DE}, \overrightarrow{DB}\rangle &= \langle \overrightarrow{DA} + \overrightarrow{AE}, \overrightarrow{DB}\rangle \text{ par la relation de Chasles}\\ &= \langle \overrightarrow{DA}, \overrightarrow{DB}\rangle + \langle \overrightarrow{AE}, \overrightarrow{DB}\rangle \text{ par bilinéarité}\\ &= \langle \overrightarrow{DA}, \overrightarrow{DB}\rangle + 0\\ &= \langle \overrightarrow{DA}, \overrightarrow{DB}\rangle\end{aligned}$$

Remarquons que le triangle DAB est rectangle en A et ne peut donc pas être également rectangle en D. D'où $\langle \overrightarrow{DA}, \overrightarrow{DB}\rangle \neq 0$ et donc (DE) et (BD) ne sont pas orthogonales

c) **Oui** et **Non**. Notons $\vec{u} = \overrightarrow{DA}$, $\vec{v} = \overrightarrow{DC}$ et $\vec{w} = \overrightarrow{DH}$. Ces vecteurs sont orthogonaux deux-à-deux. On a $\overrightarrow{DF} = \vec{u} + \vec{v} + \vec{w}$ et $\overrightarrow{AG} = -\vec{u} + \vec{v} + \vec{w}$.

— Pour le premier point, notons $I = D + \frac{1}{2}\overrightarrow{DF}$ et $J = A + \frac{1}{2}\overrightarrow{AG}$. On a alors

$$\begin{aligned}\overrightarrow{IJ} &= \overrightarrow{ID} + \overrightarrow{DA} + \overrightarrow{AJ}\\ &= -\frac{1}{2}\overrightarrow{DF} + \vec{u} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AG}\\ &= -\frac{1}{2}\vec{u} - \frac{1}{2}\vec{v} - \frac{1}{2}\vec{w} + \vec{u} - \frac{1}{2}\vec{u} + \frac{1}{2}\vec{v} + -\frac{1}{2}\vec{w}\\ &= \vec{0}\end{aligned}$$

Par conséquent $I = J$. Puisque par construction $I \in (DF)$ et $J \in (AG)$, on en déduit que ces droites sont sécantes.

— Calculons :

$$\begin{aligned}\langle \overrightarrow{DF}, \overrightarrow{AG}\rangle &= \langle \vec{u} + \vec{v} + \vec{w}, -\vec{u} + \vec{v} + \vec{w}\rangle\\ &= -\|u\|^2 + \|v\|^2 + \|w\|^2 \text{ car la famille } (\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}) \text{ est orthogonale}\\ &= -c^2 + c^2 + c^2\\ &= \boxed{c^2 > 0}\end{aligned}$$

où c est la longueur d'une arête de ce carré.

Problème 3 : suites, raisonnement et algorithmique

1. a) On a

$$u_1 = 4u_0 - 9 \times 0 + 6 = \boxed{6}$$
$$u_2 = 4u_1 - 9 \times 1 + 6 = \boxed{21}$$
$$u_3 = 4u_2 - 9 \times 2 + 6 = \boxed{72}$$

b) Non la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ n'est pas arithmétique. Raisonnons par l'absurde Si elle l'était il existerait $r \in \mathbb{R}$ telle que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = u_n + r$. On aurait donc $r = u_1 - u_0 = 6$ et $r = u_2 - u_1 = 15$ ce qui est impossible. D'où la conclusion $\boxed{\text{la suite } (u_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ n'est pas arithmétique}}$

c) Montrons par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$ que u_n est multiple de 3.
— **Initialisation** On a $u_0 = 0 = 3 \times 0$.
— **Hérédité** Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que u_n soit multiple de 3. On a alors $u_n = 3 \times k$ avec $k \in \mathbb{Z}$ et donc

$$u_{n+1} = 4u_n - 9n + 6 = 4 \times 3 \times k - 9n + 6 = 3 \times (4k - 3n + 2)$$

où $4k - 3n + 2 \in \mathbb{Z}$. Ainsi u_{n+1} est multiple de 3.
D'où la conclusion par récurrence

2. a) Soit $n \in \mathbb{N}$, on a

$$\begin{aligned} v_{n+1} &= u_{n+1} - 3(n+1) + 1 \\ &= 4u_n - 9n + 6 - 3n - 3 + 1 \\ &= 4u_n - 12n + 4 \\ &= 4(u_n - 3n + 1) \\ &= 4v_n \end{aligned}$$

D'où $\boxed{(v_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ est géométrique de raison } 4}$

b) Puisque la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est géométrique de raison 4,

$$v_n = 4^n \times v_0 = 4^n \times (u_0 - 3 \times 0 + 1) = 4^n$$

et donc

$$u_n = v_n + 3n - 1 = \boxed{4^n + 3n - 1}$$

3. En passant $u_n = 4^n + 3n - 1$ modulo 2, on obtient $u_n \equiv n + 1$ modulo 2. On raisonne par double implication :
— Supposons n impair. $n + 1 \equiv 2 \equiv 0$ modulo 2 et donc $u_n \equiv 0$ modulo 2,c 'est-à-dire $\boxed{u_n \text{ pair}}$
— Supposons u_n pair. On a donc $u_n \equiv 0$ modulo 2 et donc $n + 1 \equiv 0$ modulo 2 ou encore $n \equiv 1$ modulo 2, c'est-à-dire $\boxed{n \text{ impair}}$

a) Soit $n \in \mathbb{N}$, on utilise la formule du 2.b. :

$$u_{n+1} - u_n = 4^{n+1} + 3(n+1) - 1 - (4^n + 3n - 1) = 4^{n+1} - 4^n + 3 = 4^n \times (4-1) + 3 = 4^n \times 3 + 3 = 3 \times (4^n + 1)$$

or $4^n + 1 \geq 0$ donc $u_n \leq u_{n+1}$ et $\boxed{\text{la suite } (u_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ est donc croissante}}$

b) Puisque $\lim\limits_{n\to+\infty} 4^n = +\infty$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} 3n = +\infty$, on en déduit que $\boxed{\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty}$

c) On a le code suivant :

```python
def Seuil(S):
    u = 0 # u_0
    n = 0 # Initalisation du rang
    while u < S:
        u = 4*u-9*n + 6 #u_n+1=4u_n-9n+6
        n = n+1 # Incrémentation du rang
    return n

```

d) Soit $S > 0$, puisque $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$ (question b)) il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \in \mathbb{N}$, si $n \geq N$ alors $u_n \geq S$. Ainsi quand l'on exécute `Seuil(S)`, la boucle `while` du code ci-dessus s'arrêtera nécessairement au plus tard à la N-ème itération. La valeur renvoyée par `Seuil(10**9)` est $\boxed{15}$

Problème 4 : fonctions

Partie A : étude mathématique d'une fonction.

1. On a pour $x \in \mathbb{R}$,
$$f(x) = 6xe^{-0.5x} = 12 \times \frac{0.5x}{e^{-0.5x}}$$
et donc, par croissances comparées $\boxed{\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0}$

   On en déduit que $\boxed{\mathcal{C}_f \text{ admet la droite } y = 0 \text{ pour asymptote horizontale en } +\infty}$

2. a) f étant produit de fonctions dérivables sur $[0, +\infty[$, $\boxed{f \text{ est dérivable sur } [0, +\infty[}$ De plus pour $x \geq 0$,
$$f'(x) = 6e^{-0.5x} - 6x \times 0.5e^{-0.5x} = \boxed{(6 - 3x)e^{-0.5x}}$$

   b) On a $f'(x) \geq 0$ si et seulement si $6 - 3x \geq 0$ si et seulement si $x \leq 2$.

x	0		2		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$	0	↗	$\frac{12}{e}$	↘	0

3. La fonction f est strictement décroissante sur $[2, +\infty[$. La fonction f est continue sur $[2, +\infty[$ et $\frac{6}{e}$ se situe entre $f(2) = \frac{12}{e}$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0$. On peut donc appliquer le théorème de la bijection et l'on obtient $\boxed{\text{une unique solution à l'équation } f(x) = \frac{6}{e}}$

   Les exécutions suivantes :

```
import numpy as np
```

```
def f(x):
    return 6*x*np.exp(-0.5*x)

x=2
while f(x)>6/np.e:
    x+=0.01
```

   donne le résultat $\alpha \approx 5.36$ à 0.01 près par valeur supérieure.

4. La fonction f étant de classe $\mathcal{C}^2$, elle est convexe (resp. concave) sur un intervalle si et seulement si $f'' \geq 0$ (resp. $f'' \leq 0$) sur cet intervalle. Puisque $f''(x) = (1.5x - 6)e^{-0.5x}$, on en déduit que $f''(x)$ est du signe de $1.5x - 6$ et donc $f''(x) \geq 0$ si et seulement si $x \geq 4$.

   Par conséquent :

   — $\boxed{f \text{ est concave sur } [0, 4]}$

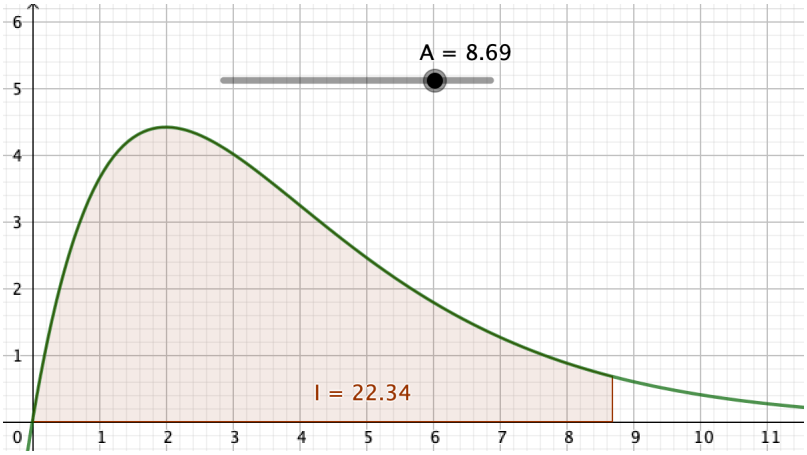
   — $\boxed{f \text{ est convexe sur } [4, +\infty[}$

   — $\boxed{f \text{ admet un point d'inflexion en } 4}$

5. a) Remarquons que $v : x \mapsto x$ et $u : x \mapsto -2e^{-0.5x}$ sont deux fonctions de classe $\mathcal{C}^1$ et que $v'(x) = 1$ et $u'(x) = e^{-0.5x}$. Ainsi

$$\begin{aligned}\int_0^A f(x)dx &= 6\int_0^A u'(x)v(x)dx \\ &= 6\left([u(x)v(x)]_0^A - \int_0^A u(x)v'(x)dx\right) \text{ par IPP} \\ &= 6\left([-2xe^{-0.5x}])_0^A + 2\int_0^A e^{-0.5x}dx\right) \\ &= 6\left(-2Ae^{-0.5A} + 2[-2e^{-0.5x}]_0^A\right) \\ &= \boxed{-12Ae^{-0.5A} - 24e^{-0.5A} + 24}\end{aligned}$$

b) La fonction f étant positive sur $[0, A]$, le nombre $\int_0^A f(x)dx$ calculé ci-dessus représente l'aire enfermée entre les abscisses 0 et A, l'axe des abscisses et la courbe $\mathcal{C}_f$:



c) On a $\lim\limits_{A\to+\infty} e^{-0.5A} = 0$ car exp admet 0 pour limite en $-\infty$ et $\lim\limits_{A\to+\infty} Ae^{-0.5A} = 0$ par croissances comparées. Ainsi, avec la formule obtenue à la question a) et les règles de calcul sur les limites on en déduit que

$$\boxed{\lim_{A\to+\infty}\int_0^A f(x)dx = 24}$$

Partie B : application.

1. Selon cette modélisation, la concentration est maximale au point où f admet un maximum qui est, d'après le tableau de variation obtenu à la question A 2 b), $\boxed{\text{à } 2h}$
2. Selon cette modélisation, la concentration est maximale est donnée par la valeur maximale de f qui est, d'après le tableau de variation obtenu à la question A 2 b), $\frac{12}{e}$. La concentration aura donc diminué de moitié quand f vaudra $\frac{6}{e}$ ce qui arrivera, à $5,36h$ d'après la question A 3 ou encore $\boxed{\text{à environ } 5h \text{ et } 20 \text{ minutes}}$
3. La vitesse d'élimination est la plus élevée au moment où la dérivée de f admet un minimum ce qui se passe en un point d'inflexion de f. D'après la question A 4, c'est $\boxed{\text{à } 4h}$
4. L'aire entre la courbe et l'axe des abscisses sur l'intervalle $[0, A]$ est donné, d'après la question A 5 b), par $\int_0^A f(x)dx$. Ainsi quand l'on fait tendre A vers $+\infty$, on obtient l'exposition et d'après la question A 5 c), cette exposition s'élève à $\boxed{24mg/L.h}$